

Métodos topológicos en el análisis no lineal

Clase 6 - 16/9 (versión preliminar)

1 Tengo miedo del encuentro

Como es costumbre, dedicaremos unos párrafos al ‘pasado que vuelve’, a fin de poder entender lo que sigue. Aunque en este caso no hace falta hacer todo un índice temático, sino recordar simplemente que estábamos hablando de la temática del índice.

A grandes rasgos, definimos el índice para curvas C^1 a trozos y probamos la invariancia por homotopías (por ahora suaves... tiempo al tiempo). De allí dedujimos una primera versión de Rouché para curvas suaves: si

$$|\gamma(t) - \delta(t)| < |\delta(t)|$$

para todo t , entonces $I(\gamma) = I(\delta)$. Finalmente, de puro cómodos, observamos que el resultado también vale para curvas C^2 a trozos.

Para extender la definición, la estrategia es clara: dada una curva continua γ que no pasa por el origen, podemos elegir otra curva C^2 a trozos $\hat{\gamma}$ (por ejemplo, una poligonal) que se encuentre cerca de γ y definir

$$I(\gamma) := I(\hat{\gamma}).$$

Si queremos hacerlo de manera prolija, tenemos que estar seguros de que cualquier otra curva suave cercana a γ va a tener el mismo índice. Para ello, tomemos $\varepsilon = d/6$, donde d es la distancia de la curva al origen, es decir: $d = \min_{t \in [a,b]} |\gamma(t)|$. Cubrimos la imagen de γ con bolas abiertas de radio ε centradas en cada uno de sus puntos y fijamos una partición $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ tales que $\gamma([t_{j-1}, t_j])$ se mete en alguna de esas bolas para todo $j = 1, \dots, N$ (el número de Lebesgue, ¿tendrá algo que ver?). Luego definimos $\hat{\gamma}$ como la poligonal que une los puntos $\gamma(t_j)$, que por definición se encuentra, para todo t , a distancia menor que 2ε de la curva γ . En consecuencia, $\hat{\gamma}$ está a distancia mayor que 4ε del origen.

Supongamos ahora que δ es otra curva C^2 a trozos que se mantiene siempre a distancia menor que 2ε de γ . Para todo t vale

$$|\hat{\gamma}(t) - \delta(t)| < 4\varepsilon < |\hat{\gamma}(t)|$$

y entonces, por el lema de Rouché, $I(\delta) = I(\hat{\gamma})$

La construcción anterior muestra, en particular, que la función I es continua respecto de γ : en términos más precisos, si consideramos el conjunto de curvas ‘admisibles’

$$\mathcal{A} := \{\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} : \gamma \text{ es continua}\},$$

que es un subconjunto abierto del espacio $C([a, b], \mathbb{C})$, entonces la aplicación $I : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{Z}$ es continua. Pero un codominio tan discreto nos dice que, en realidad, es localmente constante o, dicho de manera más pretenciosa: constante sobre cada componente conexa de \mathcal{A} . Esto prueba la invariancia por homotopía cuando h es solamente continua:

Teorema 1.1 *Sea $h : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ continua tal que $h(a, s) = h(b, s)$ para todo s . Entonces el índice de la curva $\gamma_s := h(\cdot, s)$ es independiente de s .*

Demostración: Basta observar que la función $s \mapsto \gamma_s$ es continua; en consecuencia, todas las curvas pertenecen a la misma componente conexa de \mathcal{A} . \square

Después de haber definido el índice de manera tan exitosa, es hora de recapitular e intentar recordar qué nos trajo por aquí. Se trataba, entre otras cosas, de probar la existencia de puntos fijos de una función continua f o, equivalentemente, ceros de $g(x) = x - f(x)$. Y, como anticipamos, el número de vueltas va a tener mucho que ver; por ejemplo:

Lema 1.2 *Sea $f : \bar{B} \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua y sea γ una parametrización de ∂B . Si f no tiene ceros, entonces $I(f \circ \gamma) = 0$.*

Demostración: Tomando $h(t, s) := f(s\gamma(t))$, se ve que $\gamma_1 = f \circ \gamma$ es homotópica a la constante $\gamma_0 \equiv f(0)$. \square

Es claro que el resultado se puede extender a cualquier región *simplemente conexa*, es decir, tal que toda curva cerrada es homotópica a una constante. Si la región tiene agujeros, entonces el borde ya no es una curva simple, es decir, no se parametriza con una única $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continua, aunque existe una manera razonable de generalizar la idea, teniendo en cuenta la orientación de las curvas. Esa es exactamente la idea del grado topológico: observemos, a modo de anticipo, que si $f : \bar{B} \rightarrow \mathbb{C}$ es continua y no se anula en ∂B , entonces tiene sentido definir

$$\deg(f, B, 0) := I(f \circ \gamma),$$

donde γ es una parametrización de ∂B orientada positivamente. Claro que esto hace que, con un poco de fastidio, caigamos en la cuenta de que hace falta mostrar que la definición no depende de la parametrización elegida. Esto es bastante claro a la luz de la definición inicial, cuando toda curva que caminaba era suave: al fin y al cabo, se trata de una integral curvilínea. Ahora, ¿no habrá alguna forma de verlo de manera directa? ¡Una homotopía por allí!

Pero todo esto vendrá más adelante; por ahora, nos limitaremos a observar que de un saque se deducen todos aquellos resultados de los que estuvimos

hablando. Por ejemplo, el teorema de Brouwer: dada $f : \overline{B} \rightarrow \overline{B}$ continua, definimos $h(t, s) = \gamma(t) - sf(\gamma(t))$, con $\gamma(t) = e^{it}$ para $t \in [0, 2\pi]$. Si $h(t, s) = 0$, entonces

$$1 = |\gamma(t)| = s|f(\gamma(t))| \leq s,$$

así que $f(\gamma(t)) = \gamma(t)$ y f tiene un punto fijo en el borde. En cambio, si h no se anula, eso quiere decir que $f \circ \gamma$ es homotópica a γ , cuyo índice es 1. Queda como ejercicio verificar los otros enunciados equivalentes (no retracción, campos que apuntan hacia un lado o el otro, etc). Notemos también que en el ejemplo anterior se puede pensar directamente en una homotopía *entre funciones*, vale decir: $h(z, s) = z - sf(z)$, de modo que $h(z, 0) = z$ y $h(z, 1) = z - f(z)$. Más en general, dos funciones continuas f y g que no se anulan en ∂B se dicen homotópicas si existe $h : \overline{B} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ continua tal que $h(z, 0) = f(z)$, $h(z, 1) = g(z)$ y además $h(z, s) \neq 0$ para $z \in \partial B$. En ese caso, ambas funciones tienen el mismo grado, es decir, sus respectivas restricciones al borde tienen el mismo índice. Esto es lo que ocurre en el teorema de Rouché: si

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \quad z \in \partial B,$$

definimos $h(z, s) = (1 - s)f(z) + sg(z)$, que no se anula para z en el borde; luego $I(f \circ \gamma) = I(g \circ \gamma)$. Pero, ¡atención! Esto no quiere decir que si una de las funciones se anula, también lo hace la otra, porque el lema anterior no es un “si y solo si”. Podría ocurrir por ejemplo que f se anulara en B pero $I(f \circ \gamma) = 0$, lo que nos impediría sacar conclusiones sobre g . Claro que si son funciones analíticas, como en el teorema original, es otro cantar...¹

Pronto veremos cómo generalizar esta clase de resultados para un abierto cualquiera, aunque la versión sobre bolas (por no decirlo de un modo más feo) es suficiente para probar, por ejemplo, el teorema fundamental del álgebra: si f es un polinomio mónico de grado n , entonces sobre el borde de una bola grande vale

$$|f(z) - z^n| < |z^n|$$

ya que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z^n} = 1$. Y, por supuesto, para $g(z) = z^n$ y nuestra γ de confianza, el índice es fácil de calcular:

$$I(g \circ \gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{(g \circ \gamma)'(t)}{g \circ \gamma(t)} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{inRe^{int}}{Re^{int}} dt = n.$$

Esto muestra que Rouché es más “poderoso” que Brouwer, al menos en este contexto. También sirve asegurar la existencia de ceros para una función más general, por ejemplo $f(z) = z^n + q(z, \bar{z})$, con q un polinomio de grado menor que n .

Cabe preguntarse también si el conteo de ceros es exacto. Recién usamos solamente el hecho de que el índice de $g \circ \gamma$ es distinto de 0, pero cuando lo

¹Algunos autores (e.g. Mawhin xxxxx) dicen, en esta situación, que f tiene un cero ‘no robusto’, pues se desvanece apenas se levanta la más ligera amenaza de homotopía. Por ejemplo, La función $f(z) = |z|^2$ es homotópica en \overline{B} a la función $g(z) \equiv 1$, de donde se concluye que el cero de f era más bien enclenque.

calculamos el resultado fue un numerito que -¡oh, sorpresa!- coincide con el grado del polinomio g .

Entonces uno dice: “ah, lo que pasa es que el índice cuenta los ceros con su multiplicidad”. Pero la cosa empieza a arruinarse cuando consideramos por ejemplo $f(z) = z^n - \bar{z}$: si tomamos $R > 1$, el índice es también n , aunque la función se anula $n + 2$ veces. Y pasa a ser un desastre completo si consideramos algo como $f(z) = \varphi(|z|)z^n$, donde φ es una función continua tal que $\varphi(R) = 1$, que se puede anular un número caprichoso de veces (incluso con caprichoso = infinito), mientras el índice continúa inmutable. Cuando entendamos mejor el concepto de grado topológico podremos esbozar una explicación de todo esto.

Para terminar esta sección veremos un caso bien simple, el de las transformaciones lineales $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, a las que identificamos (con total despreocupación notacional) con las matrices $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. No es que nos motive mucho ahora la búsqueda de ceros, tarea especialmente sencilla en esta situación, sino deducir algunas propiedades básicas de las matrices. En primer lugar, observemos que solo nos interesan las que son inversibles, ya que las otras tienen el mal hábito de anularse en ∂B_R para cualquier R y así no hay índice que les venga bien.

Sea entonces A inversible, cuyo único cero es entonces el origen y (por linealidad) podemos fijar $R = 1$, ya que el índice va a ser el mismo sobre una bola de cualquier radio. Uno esperaría que tal índice sea positivo o negativo, según A preserve o no la orientación, pero: puede dar cualquier número entero no nulo? Es muy fácil, intuitivamente, justificar que no: por ejemplo, si la curva $A\gamma(t)$ da dos vueltas alrededor del origen, entonces tiene autointersecciones y A no es inyectiva. En rigor, siempre da ± 1 , como se puede verificar haciendo la cuenta; sin embargo veremos a continuación otra forma de mostrar esto -por así decirlo- sin tantas vueltas.

En primer lugar, recordemos que una matriz siempre puede, triangulando un poco aquí y otro poco allá, llevarse a una matriz diagonal empleando únicamente operaciones de la forma $F_i \mapsto F_i + \alpha F_j$ o bien $C_i \mapsto C_i + \alpha C_j$, es decir: a una fila o una columna sumarle un múltiplo de otra. En este punto pueden llegar quejas de miles de usuarios que se encontraron con un 0 en el lugar inadecuado y necesitan por ejemplo intercambiar filas, pero si llaman al 0800 correspondiente recibirán la siguiente recomendación:

1. $F_i \mapsto F_i + F_j$.
2. $F_j \mapsto F_j - F_i$.
3. $F_i \mapsto F_i + F_j$
4. Para volver a escuchar, digite 0.

Quien siga las instrucciones obtendrá F_j en el lugar de F_i y $-F_i$ en el lugar de F_j . Por supuesto, la aparición del signo $-$ no es casualidad pero, a la hora de llevar a cabo nuestro cometido, no interesa en absoluto: el fin justifica los medios (aunque, comparado con otros fines, el nuestro es relativamente honesto).

Toda esta cháchara no tenía otro objetivo que el de mostrar que una matriz se puede llevar a una matriz diagonal por medio de homotopías: en las operaciones

anteriores alcanza con poner una pequeña $s \in [0, 1]$ multiplicando: $F_i + s\alpha F_j$. Como el determinante no cambia, la matriz sigue siendo inversible y entonces no se anula en el borde de B . Por otro lado, la operación $F_i \mapsto \alpha F_i$ con $\alpha > 0$, que es también muy “homotopizable”, convierte la matriz en algo de la pinta

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}$$

con $\sigma_j = \pm 1$. Y se puede ver que esta última es, a su vez, homotópica a una matriz igual pero con los signos opuestos, dando de paso una prueba fehaciente de que no toda homotopía es lineal:

$$A(s) := \begin{pmatrix} \sigma_1 \cos(\pi s) & -\sigma_1 \operatorname{sen}(\pi s) \\ \sigma_2 \operatorname{sen}(\pi s) & \sigma_2 \cos(\pi s) \end{pmatrix} \quad s \in [0, \pi].$$

Lo que probamos, en definitiva, es que si una matriz tiene determinante positivo entonces es homotópica a la identidad, mientras que si es negativo entonces es homotópica a la anterior matriz diagonal con $\sigma_1 = 1 = -\sigma_2$.

Es cierto que nos hemos ido relajando con las definiciones; en particular, en la última homotopía consideramos $s \in [0, \pi]$ en vez de $[0, 1]$, pero es claro que da lo mismo. La manera correcta de pensarla, en cualquier caso, es $h(x, s) = A(s)x$. Por otro lado, usamos con total tranquilidad el obvio hecho de que la relación ‘ser homotópico a’ es transitiva (en realidad, define una relación de equivalencia), lo que nos permitió ir trenzando una homotopía con otra al mejor estilo *Les Luthiers*: A homotópica a B , B homotópica a C ... (el lector que prefiera, en cambio, evocar el tango ‘Trenzas’ puede hacerlo con total libertad).

A modo de conclusión, observemos que hemos probado mágicamente (mejor dicho: homotópicamente) que el conjunto de matrices inversibles tiene exactamente dos componentes conexas. Como dijimos, dos matrices cuyo determinante tiene el mismo signo están conectadas por medio de una homotopía; por otro lado, si los signos son distintos no pueden estar en la misma componente conexa, ya que el determinante es una función continua.

2 Matar dos teoremas de un shooting

Al margen de las aplicaciones que vimos usando Brouwer y demases, la noción de índice puede ser de utilidad para resolver algunos problemas de manera directa. Para empezar, veamos una homotopía algo loca propuesta por Krasnoselskii para un sistema de primer orden

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

con condición periódica $u(0) = u(T)$. El operador de Poincaré, vaya novedad, consiste en definir $P(u_0) = u(T)$, así que sería una gran cosa poder decir que está definido en cierto $\bar{\Omega}$ razonable (una bola, ¿por qué no?) con borde parametrizado por γ y vale $I(g \circ \gamma) \neq 0$, donde $g(x) = x - P(x)$. La idea de Krasnoselskii consiste en definir una homotopía empleando los operadores de Poincaré

$P_s(u_0) := u(sT)$ correspondientes a todos los períodos menores o iguales que T ; más específicamente, considerar $g_s(u_0) = x - P_s(u_0)$. Sin embargo, para que funcione bien, hay que pedir que P_s no tenga puntos fijos en $\partial\Omega$, lo que nos arruina la perspectiva de llegar hasta $s = 0$, pues P_0 no es otra cosa que la función identidad. Entonces viene la jugada audaz: dividir por s , cosa que no produce efectos visibles para $s = 1$, que es el que nos interesa. Y lo notable es que, ahora sí, la homotopía se puede extender en forma continua hasta $s = 0$: en efecto, alcanza con observar que

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{u(sT) - u(0)}{s} = Tu'(0) = Tf(0, u(0)).$$

Luego, definimos

$$h(t, s) = \begin{cases} \frac{\gamma(t) - P_s(\gamma(t))}{s} & s \neq 0 \\ -Tf(0, \gamma(t)) & s = 0 \end{cases}$$

y obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 2.1 *En la situación anterior, supongamos:*

1. Para $0 < \hat{T} < T$, no hay soluciones del problema \hat{T} -periódico con valor inicial en $\partial\Omega$.
2. $f(0, \gamma(t)) \neq 0$ para todo t .
3. $I(f(0, \gamma(\cdot))) \neq 0$.

Entonces el problema T -periódico tiene al menos una solución con valor inicial en $\bar{\Omega}$.

Una aplicación interesante es un resultado ‘tipo Nirenberg’, que se puede pensar como una versión vectorial de las condiciones de Landesman-Lazer. Claro que, si queremos mantenernos en dimensión 2, no podemos hacerlo para un problema de segundo orden. Por eso volvemos por un rato al problema

$$u'(t) = g(u(t)) + p(t), \quad u(0) = u(T),$$

donde podemos suponer que p tiene promedio 0. La versión simple y veloz (muy mejorable) de Landesman-Lazer, si se tratase de una ecuación escalar, diría que hay soluciones por ejemplo si g es acotada, con límites en $\pm\infty$ y tal que

$$g(+\infty)g(-\infty) < 0.$$

Notemos que, en el mundo unidimensional, esta condición no solo dice que $g(\pm\infty) \neq 0$ sino que, además, esos límites dan una vuelta completa alrededor del 0, ya que tienen signos opuestos. Esto puede parecer una interpretación disparatada, cosa nada extraña si hablamos de shooting. Pero si pensamos en una $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ acotada, para empezar vamos a pedir que existan los límites radiales

$$g_v := \lim_{r \rightarrow +\infty} g(rv)$$

y son uniformes en v , con $g_v \neq 0$ para todo $v \in \partial B$. Si ahora identificamos \mathbb{R}^2 con \mathbb{C} , podemos tomar $v(t) = e^{it}$ y definir la curva $\Gamma(t) := g_{v(t)}$, que no se anula. Landesman y Lazer sugerirían entonces pedir que esa curva se dé al menos una vueltita alrededor del 0:

Proposición 2.2 *En la situación anterior, si $I(\Gamma) \neq 0$, entonces el problema tiene solución.*

Para ver esto, observemos en primer lugar que, como tantas otras veces, si fijamos $M > \|g\|_\infty + \|p\|_\infty$ entonces toda solución u del problema T -periódico satisface $|u'(t)| \leq M$ para todo t y luego

$$|u(t) - u(0)| = \left| \int_0^t u'(s) ds \right| \leq TM.$$

Con un ligero toque de informalidad, observemos que si $|u(0)|$ es muy grande, y definimos $v = \frac{u(0)}{|u(0)|}$, entonces $u(t) = u(0) + u(t) - u(0) = rv + a(t)$, con $r = |u(0)|$ y $|a(t)| \leq \frac{TM}{r}$, que es muy chiquitín. Esto significa que $g(u(t))$ se mantiene cerca de $g_v \neq 0$ y además, como p tiene promedio 0 vale

$$\int_0^T g(u(t)) dt = 0,$$

lo que es absurdo. En resumen: tenemos cotas a priori, hecho que, como ya sabemos, debe ser siempre recibido con gran algarabía.

La siguiente observación es que podemos suponer que $|g_v| > \|p\|_\infty$. Para ver esto, alcanza con fijar una constante $C \geq 1$ tal que $C|g_v| > \|p\|_\infty$ y elegir el M anterior con cierta generosidad, por ejemplo $M = C\|g\|_\infty + \|p\|_\infty$. De esta forma, si definimos, como en la Figura 1, $\hat{g}(u) = \varphi(|u|)g(u)$, donde φ vale 1 hasta cierto R y luego sube hasta quedarse quieta en C , las cotas para esta \hat{g} son las mismas que antes y para R grande las soluciones de ambos problemas coinciden.

Ahora sí, pasamos a la ansiada demostración; para los que sienten nostalgias de escuchar su homotopía loca, vamos a emplear el resultado de Krasnoselskii.

Paso 1: Si $R \gg 0$ entonces no hay soluciones del problema \hat{T} -periódico con $\hat{T} \leq T$ que tengan valor inicial $u_0 \in \partial B_R(0)$. Esto funciona igual que antes: en primer lugar, si u es solución se obtiene $|u(t) - u(0)| \leq \hat{T}M \leq TM$. La diferencia es que ahora al integrar queda

$$0 = \int_0^{\hat{T}} g(u(t)) dt + \int_0^{\hat{T}} p(t) dt,$$

lo que explica por qué antes nos tomamos el trabajo de truncar: ¡no podemos tachar el último término! Pero justamente, nuestra precaución de asumir ya que $\|p\|_\infty < |g_v|$ para todo v hace que la igualdad anterior lleve de todas maneras a una herida absurda cuando suponemos $|u(0)| \gg 0$.

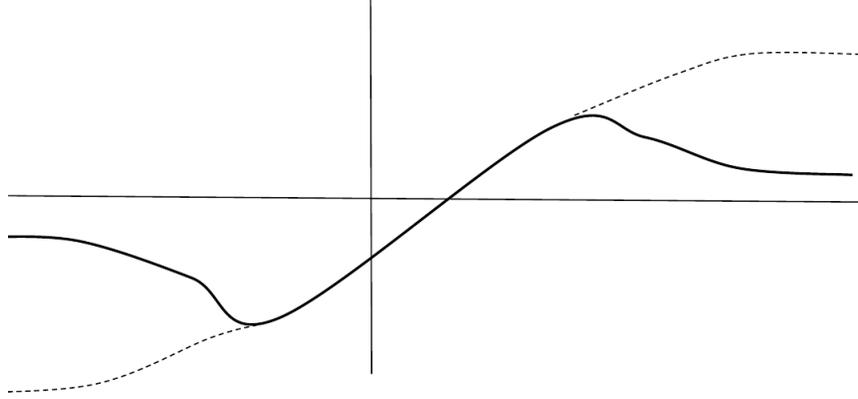


Figure 1: Primero hay que saber acotar, después truncar y al fin...

Paso 2: En la situación de la Proposición 2.1 tenemos $\gamma(t) = Re^{it}$ y $f(0, \gamma(t)) = p(0) + g(\gamma(t))$, que está cerca de $p(0) + \Gamma(t)$ y en consecuencia no se anula.

Paso 3: La curva $f(0, \gamma(t))$ tiene el mismo índice que Γ . Esto se ve, por ejemplo, usando Rouché:

$$|p(0) + \Gamma(t) - \Gamma(t)| = |p(0)| < |\Gamma(t)|.$$

A modo de corolario, cabe observar que si se trata de un *sistema gradiente* de la forma

$$u'(t) = \nabla G(u(t)) + p(t),$$

entonces no hace falta pedir que la función $g = \nabla G$ sea acotada. Por supuesto, en tal caso nuestra definición de la curva Γ se complica, pero se puede poner alguna condición para garantizar que -como diría el músico Xenakis- g se dirige a un fin definido. Por ejemplo, se puede imponer la sencilla condición propuesta por Ortega de que existan los límites radiales

$$q_v := \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{g(rv)}{|g(rv)|}$$

y sean no nulos y uniformes en v . En este caso, es fácil ver que funciona todo lo anterior tomando $\Gamma(t) := q_{v(t)}$. La explicación está otra vez en las cotas: si multiplicamos la ecuación -para variar- por $u'(t)$, entonces al integrar obtenemos

$$\int_0^T |u'(t)|^2 dt = \int_0^T [\nabla G(u(t))]' dt + \int_0^T \langle p(t), u'(t) \rangle dt,$$

de donde

$$\|u'\|_{L^2} \leq \|p\|_{L^2}$$

y el resto sigue como antes. En general, al igual que en el contexto de Landesman-Lazer, es posible poner condiciones no asintóticas, reemplazando Γ por $\Gamma_R(t) = g(Re^{it})$ para R suficientemente grande. Pero no alcanza con pedir $I(\Gamma_R) \neq 0$: como veremos más adelante, hay que garantizar que g no se pone a rotar como una desaforada.

Para concluir, vamos a analizar un problema T -periódico similar, pero que por conveniencia plantearemos para una función $z : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$,

$$z'(t) = g(\bar{z}(t)) + p(t).$$

Aquí la rayita horizontal se refiere al conjugado (nota mental: no usar el promedio por un rato). Tal vez sorprenda ver que la ecuación aparece planteada en esos términos, pero se debe al hecho de que si g es analítica, entonces es un sistema gradiente. Hay dos sujetos que pueden aportar pruebas de esto: se llaman Cauchy y Riemann y suelen frecuentar los libros de análisis complejo. Para el que no quiera meterse en problemas con gente del hampa, basta observar que si G es una primitiva de g entonces

$$|z'(t)|^2 = z'(t)\bar{z}'(t) = G(\bar{z}(t))' + p(t)\bar{z}'(t)$$

y, como antes,

$$\|z'\|_{L^2} \leq \|p\|_{L^2} \quad (1)$$

En particular, si g es un polinomio, para $v = e^{it}$ vale

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{g(rv)}{|g(rv)|} = \frac{a_n}{|a_n|} e^{-int},$$

uniformemente en t , donde a_n es el coeficiente principal de g . Esto quiere decir que la curva Γ da n vueltas en sentido horario y la existencia de soluciones queda demostrada.

Una observación debida a J. Mawhin, acaso inesperada, es que el resultado se puede ver como una generalización del teorema fundamental del álgebra: en efecto, debido precisamente a (1), las soluciones que obtenemos para el caso particular $p = 0$ son constantes y en consecuencia raíces del polinomio. Esta observación sirve para entender por qué el resultado no sale si la función (analítica) g no es un polinomio: el problema no son las cotas para z' sino el hecho de que las curvas $\Gamma_R(t) = g(Re^{it})$ son bastante intrincadas. Un comentario (solo para fans) es que esto ocurre porque ∞ es una singularidad esencial y entonces para $|z|$ grande g puede tomar cualquier valor (bah, casi). Pero aun sin saber nada de esto podemos convencernos con un ejemplo: para $g(z) = e^z$ el problema no tiene solución si $p = 0$ y las curvas tienen un aspecto tenebroso:

$$\Gamma_R(t) = e^{Re^{-it}} = e^{R \cos(t)} e^{-iR \sin(t)}.$$

Notemos que Γ_R se va acercando y alejando del origen, aunque a la hora de calcular el índice su módulo no importa (¿por qué?). Y para la curva $e^{-iR \sin(t)}$ se ve, haciendo la cuenta, que a pesar de que gira muchísimo, su índice es 0.

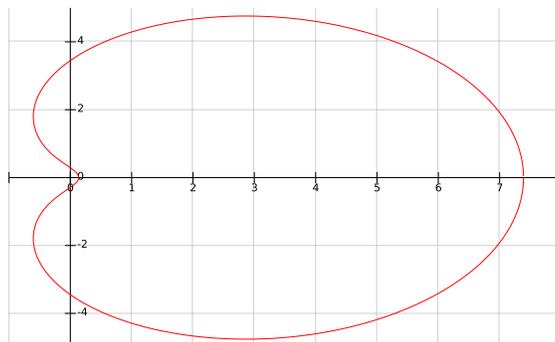


Figure 2: Gráfico para $R = 2$

Esto es porque su recorrido, como muestra la figura con $R = 2$, deja afuera el cero.

Para R más grande la gráfica no es tan clara, aunque si miramos con lupa lo que ocurre cerca del origen, vemos que en rigor no lo ‘deja afuera’ porque lo bordea una y otra vez, pero al final lo esquiva de manera olímpica. En las figuras 3 y 4 vemos la curva para $R = 4$, con el detalle en 0: cuando la curva parecía encaminarse a completar su primera vuelta positiva, un cambio inesperado de rumbo le hizo dar una vuelta negativa, que luego se cancela al llegar al punto de partida.

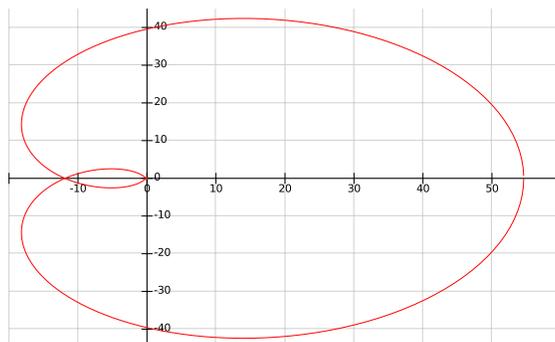


Figure 3: Gráfico para $R = 4$

El último resultado obtenido explica por fin el título de esta sección, pues con el mismo teorema hemos dado cuenta de dos “pájaros” poderosos: un teorema ‘tipo Nirenberg’ y el teorema fundamental del álgebra. Uno podría decir que a este último ya lo habíamos matado pocas páginas atrás, aunque la generalización que obtuvimos es bastante significativa. Esto nos lleva a concluir que en realidad no estaba muerto: estaba de parranda. A modo de nota (o acorde)

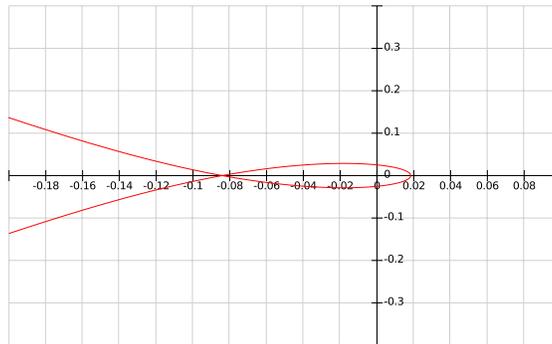


Figure 4: ... al mundo nada le importa, yira, yira

final, advertimos que el lector preocupado por este sorpresivo cambio de género musical, puede quedarse tranquilo: en las próximas clases retomaremos la senda tanguera a la que ya se había acostumbrado.

References

[1]